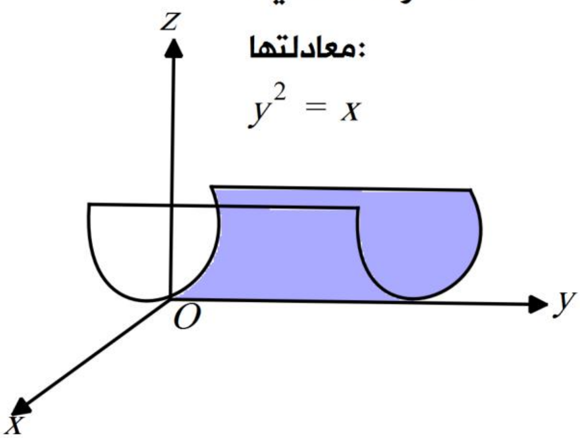
التكاملات الثلاثية

د. منير الترك

6) الأسطوانة المكافئية:

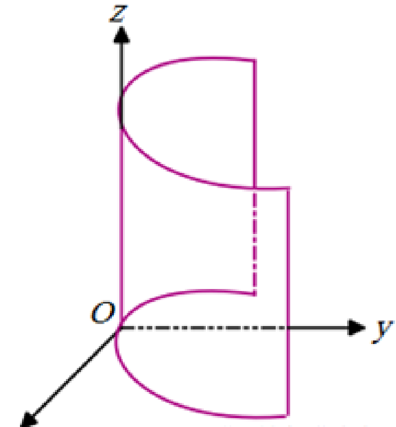
وهي من المجسمات معادلتها من الدرجة الثانية أشكالها:



اسطوانة مكافئية

معادلتها:

$y^2 = x$



اسطوانة مكافئية

معادلته:

$z^2 = x$

التكامل الثلاثي:

هو تكامل تابع لثلاثة متحولات على منطقة فراغية وهنا يجري تقسيم المنطقة الى حجوم صغيرة بدلا من مساحات صغيرة ثم نأخذ قيم التابع $f(x,y,z)$ في نقط داخل الحجوم ثم نأخذ مجموع جداء هذه الحجوم ثم نأخذ نهاية هذا التابع عندما يسعى كل حجم صغير جدا الى الصفر كما فعلنا في التكامل الثنائي .

اذا كانت نهاية $I = \iiint_V f(x,y,z)d(x)d(y)d(z)$ موجودة فإننا نسميه تكامل ثلاثي وذلك بشرطين:

1. بأن تكون المنطقة V محاطة أو محدودة بسطح صقيل أو صقيل جزئيا

2. أن يكون التابع $f(x,y,z)$ معرف ومستمر على هذه المنطقة الفراغية

واذا لم يتحقق أحد هذين الشرطين فإن التكامل الثلاثي ندعوه باتكامل الشاذ

حساب التكامل الثلاثي بالإحداثيات الديكارتية

هذه الطريقة تدعى بالتجزئة القائمة أو بالتجزئة العمودية وفي هذه الحالةتتم المكاملة بالنسبة ل x أولا وإبقاء ال z,y ثابتان وبعد اجراء التكامل بالنسبة ل x يصبح التكامل ثنائيا على سطح جديد وهو مسقط السطح المفروض على المستوي yoz أو العكس يمكن أن نكامل بالنسبة ل z وبمجرد المكاملة بالنسبة ل z نسقط السطح على xoy ويتحول التكامل المباشر الى تكامل ثنائي وذلك حسب المنطقة البسيطة بالنسبة ل oz أو بالنسبة ل oy أو بالنسبة ل ox وكذلك الأمر اذا كان التكامل بالنسبة ل y أما اذا كان $f(x,y,z)=1$ فإن التكامل يعبر عن حجم المنطقة التي نكامل عليها أي المنطقةV

و إذا كانت $\iiint_V x\, d(x)d(y)d(z)$ فإنها تمثل مركز ثقل المركبة الأولى

و إذا كانت $\iiint_V y\, d(x)d(y)d(z)$ فإنها تمثل مركز ثقل المركبة الثانية

و إذا كانت $\iiint_V z\, d(x)d(y)d(z)$ فإنها تمثل مركز ثقل المركبةالثالثة

و إذا كانت $\iiint_V x^2+y^2+z^2\, d(x)d(y)d(z)$ فإنها تمثل عزم عطالة المجسمV

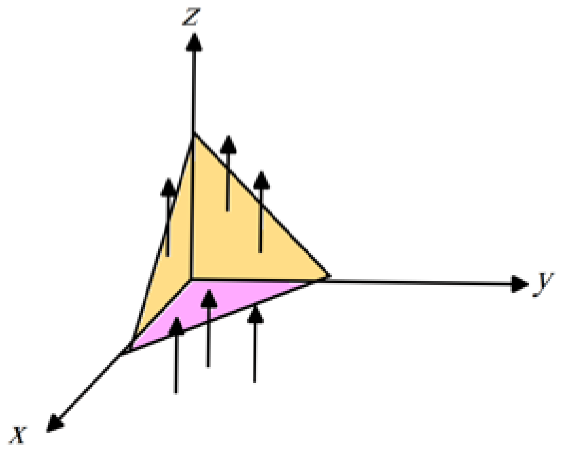
مثال(1):

$$\mathbf{I}=\iiint\limits_{V}\mathbf{z d(x)d(y)d(z)}$$

$$\mathbf{V}=\begin{cases}\mathbf{x=0}\\ \mathbf{y=0}\\ \mathbf{z=0}\\ \mathbf{x+y+z=1}\end{cases}$$

الحل

يمكن لنا أن نثبت كل من x وy ونغير ال z وذلك بالدخول من السطح $z = 0$ و



و الخروج من $z = 1 - x - y$ ثم نجري التكامل على z

وبعد التعويض بحدود التكامل مباشرة يصبح الشكل

مسقط على المستوي xoy } أي أننا نريد أن نحصر

الحجم المطلوب بين المستويين فقط ونلاحظ أن

المستويين يغطيان الحجم المطلوب

نعوض في التكامل:

$$I = \iint (\int_{z=0}^{z=1-x-y} zd(z))d(x)d(y)$$

$$\iint \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} d(x)d(y)$$

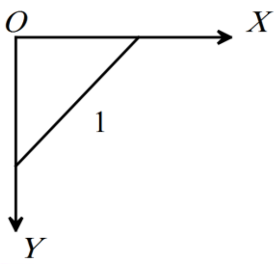
$$I = \frac{1}{2}\iint (1-x-y)^2 d(x)d(y)$$

والأن نسقط الشكل على المستوي yox فيكون الشكل كما في الشكل إذا نقوم بتثبيت xبين الصفر و الواحد والأن لنوجد معادلة المستقيم المائل والذي يمر من نقطتين هما (1,0) و (0,1)

تذكرة: تعطى معادلة مستقيم يمر من نقطتين و لتكن $M_0(x_0, y_0)$و $N(x_1, y_1)$

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

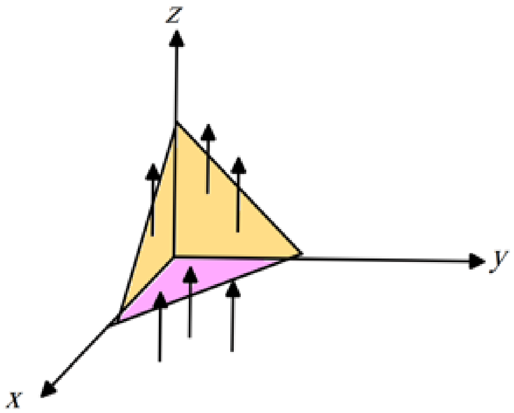
إذا أصبحت معادلة المستقيم هي $\frac{x-1}{y} = -\frac{1}{1} \Rightarrow y = 1 - x$



إذا نغير الY بين المستقيمين: $y = 0$ و $y = 1 - x$ لنعوض الان في التكامل:

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left[\int_{y=0}^{y=1-x}(1-x-y)^{2}d(y)\right]d(x)=-\frac{1}{6}\int_{0}^{1}[(1-x-y)^{3}]_{0}^{1-x}d(x)$$

$$I=-\frac{1}{6}\int_{0}^{1}[(1-x-1+x)^{3}-(1-x)^{3}]d(x)$$



$$I=\frac{1}{6}\int_{0}^{1}(1-x)^{3}d(x)=-\frac{1}{24}[(1-x)^{4}]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{24}$$

مثال (2):

$$\mathbf{I=\iiint_{V}\frac{1}{(x+y+z+1)^{3}}d(x)d(y)d(z)}$$

$$\mathbf{V=\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\\x+y+z=1\end{cases}}$$

الحل:

$$I=\iint\left(\int_{z=0}^{z=1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^{3}}d(z)\right)d(x)d(y)$$

$$I=-\frac{1}{2}\iint\left[\frac{1}{(1+xy+z)^{2}}\right]_{z=0}^{z=1-x-y}d(x)d(y)$$

$$I=-\frac{1}{2}\iint\frac{1}{(1+x+y+1-x-y)^{2}}-\frac{1}{(1+x+y)^{2}}d(x)d(y)$$

$$I=-\frac{1}{2}\iint\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^{2}}d(x)d(y)$$

نقوم بتثبيت ال y بين الصفر و الواحد و أما x فهو متغير بين $x = 0$ و $x = 1 - y$ حيث نوجد معادلة المستقيم كما في المثال الأول

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{x=0}^{x=1-y} \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+y+x)^2} d(x)\right) d(y)$$

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{(1+y+x)^1}\right]_0^{1-y} d(y) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-y)}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+y} d(y)$$

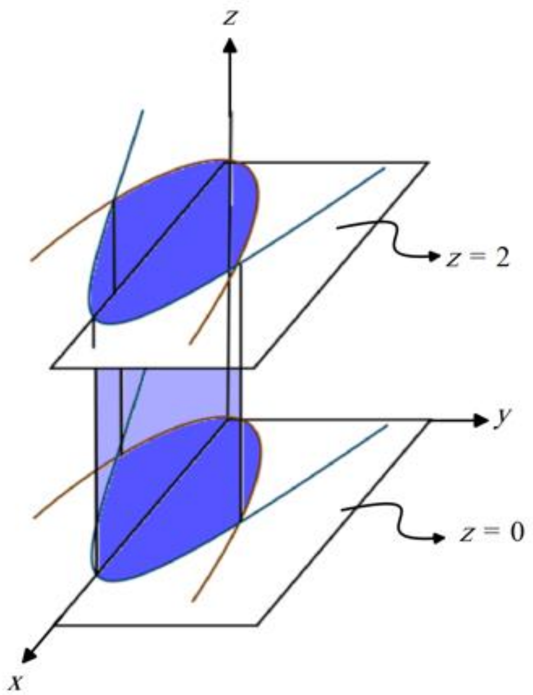
$$I = -\frac{1}{2}\left[-\frac{(1-y)^2}{8} + \frac{y}{2} - \ln(1+y)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2} - \ln(2) + \frac{1}{8}\right)$$

$$I = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} - \ln(2)\right) = -\frac{5}{16} + \frac{\ln(2)}{2}$$

مثال(3):

احسب قيمة التكامل المحصور ضمن:

$$V = \begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \\ y^2 = x \\ y^2 = 4 - 3x \end{cases}$$



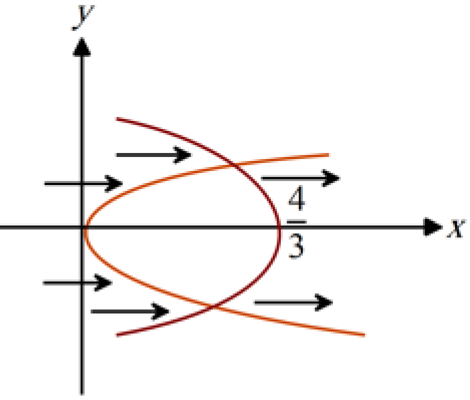
الحل

$$I = \iint \left[\int_{z=0}^{z=2} d(z)\right] d(x)d(y) = 2\iint d(x)d(y)$$

نحسب السطح الأعلى و نضرب ب2 نثبت ال y

بين الصفر و الواحد ونغير الx بين $x = y^2$

و $x = \frac{4-y^2}{3}$



$$I = 4\int_0^1 \left[\int_{x=y^2}^{x=\frac{4-y^2}{3}} d(x)\right] d(y) = 4\int_0^1 \frac{4-y^2}{3} - y^2 d(y)$$

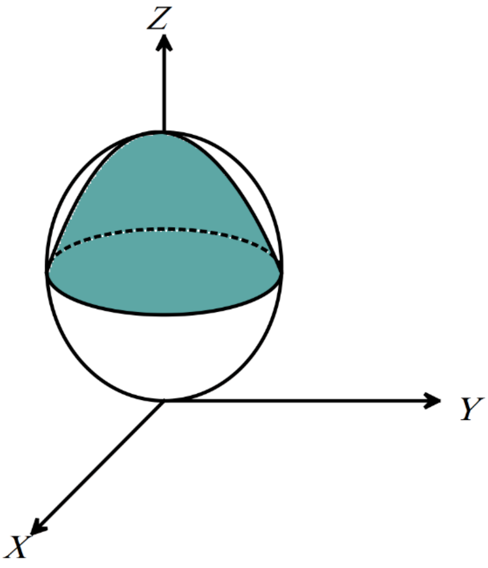
$$I = \frac{16}{3}\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{32}{9}$$

ملاحظة:

يمكن استخدام الاحداثيات الاسطوانية إذا كنا أمام شكل متناظر بالنسبة للمحاور الإحداثية وفي هذه الحالة نستخدم الاحداثيات القطبية

مثال(4): احسب حجم المنطقة المحاطة ب :

$$V = \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 - z \end{cases}$$



نعلم أن $x^2 + y^2 = z^2$ هو عبارة عن مجسم قطع ناقصي

ذروته (0,0,0) وجهة تقعره للأعلى ونعلم أنه عندما نضرب

بإشارة ناقص فإن جهة التقعر تنعكس إذا $x^2 + y^2 = -z$

وبعد ذلك نضيف للطرف z (2) ونعوض x=0,y=0 لنوجد قيمة

z نجد أنها 2 إذا أصبحت المعادلة عبارة عن مجسم قطع

ناقص مركزه (0,0,2) جهة تقعره للأسفل

$$x^2 + y^2 = 2 - z$$

لنوجد نقاط التقاطع بين المجسمين الكرة ومجسم القطع

الناقص لنحل جملة المعادلتين حل مشترك:

$$2 - z = -(z^2 - 2z + 1) + 1$$

$$2 - z = -z^2 + 2z - 1 + 1$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

إما $z = 2$ أو $z = 1$

في هذه المسألة لدينا سطحان سطح نصف كرة السفلي الجزء العلوي من مجسم القطع وفي هذه الحالة علينا الدخول من الأسفل الى الأعلى أي من سطح الكرة السفلي والخروج من سطح مجسم القطع الموجود في الأعلى أي أننا اعتبرنا أن المنطقة بسيطة بالنسبة ل oZ وبمجرد إجراء التكامل على z والتعويض بحدي المكاملة نسقط هذه المنطقة على المستوي xoy ونكتب :

$$I = \iint \{ \int_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}+1}^{z=2-x^2-y^2} dz\} dxdy$$

هنا وضعنا إشارة ناقص لأننا أخذنا نصف الكرة السفلية فقط

$$I = \iint 2 - x^2 - y^2 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} - 1dxdy$$

$$I = \iint 1 - (x^2 + y^2) + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}dxdy$$

لننتقل الى الإحداثيات القطبية :

نجد أن مسقط المجسم على المحور xoy هو عبارة عن دائرة

$$I=\int_0^{2\pi}\{\int_0^1(-r^2+1+\sqrt{1-r^2})rdr\}\,d\theta$$

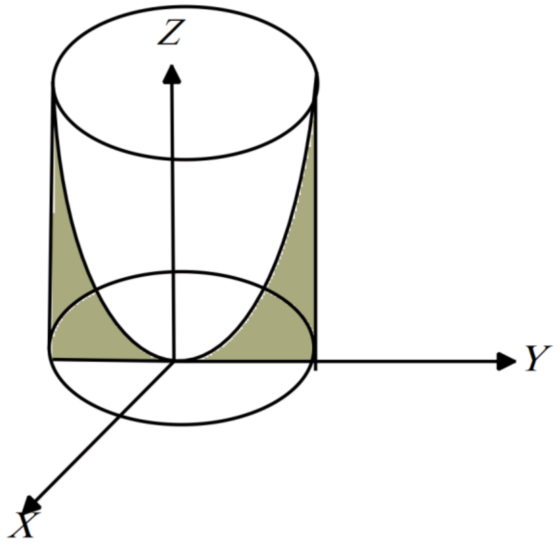
$$I=\int_0^{2\pi}\left\{-\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}-\frac{2}{6}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right\}_0^1 d\theta$$

$$I=\int_0^{2\pi}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(0)+\frac{1}{3}d\theta$$

$$I=\frac{7}{12}\int d\theta=\frac{7}{12}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$I=\frac{7\pi}{6}$$

مثال(5):



$$I=\iiint_V(x^2+3z^2)dxdydz$$

$$V=\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=0\\ x^2+y^2=z\end{cases}$$

حيث أن V هي المنطقة المحصورة بين السطوح الثلاثة :

$$v=\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=0\\ x^2+y^2=z\end{cases}$$

$$I=\iint\{\int_{z=0}^{z=x^2+y^2}x^2+3z^2dz\}dxdy$$

$$I=\iint\{x^2.z+z^3\}_0^{x^2+y^2}dxdy$$

$$I = \iint (x^2(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^3 - 0)dxdy$$

$$I = \int_0^{2\pi} (\int_0^2 (r^6 + r^2\cos\theta r^2)rdr)d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} (\int_0^2 r^7 + r^5\cos^2\theta rdr)d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left\{\frac{r^8}{8} + \frac{r^6\cos^2\theta}{6}\right\}_0^2 d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{32\cos^2\theta}{3} + 32d\theta$$

$$I = 32\int_0^{2\pi} (\frac{1+\cos2\theta}{6} + 1)d\theta$$

$$I = 32\left\{\frac{\theta}{6} + \frac{\sin(2\theta)}{12} + \theta\right\}_0^{2\pi}$$

$$I = 32\left(\frac{2\pi}{6} + 2\pi + 0\right) = 32\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{224\pi}{3}$$

مثال(6):

أوجد حجم المنطقة الواقعة بين داخل النصف العلوي للكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

وداخل الأسطوانة $x^2 + (y-1)^2 = 1$

$$I = \iint (\int_{z=0}^{z=\sqrt{4-(x^2+y^2)}} dz)dx\,dy$$

$$I = \iint \sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy$$

والأن لننتقل الى الإحداثيات القطبية

لنوجد حدود الr إن

$$x^2+(y-1)^2=1$$

$$x^2+y^2=2y=r^2$$

نعلم أن

$$y=r\mathrm{Sin}(\theta)$$

$$r^2=2\,r\mathrm{Sin}(\theta)\ \Rightarrow\begin{cases} r=0\\ r=2\mathrm{Sin}(\theta)\end{cases}$$

$$I=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\sin\theta}\sqrt{4-r^2}\,r\,dr\right)d\theta$$

$$I=\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{3}(4-4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}-(4)^{\frac{3}{2}}\right)d(\theta)$$

$$I_1=-\frac{8}{3}\left(\int_0^{\pi}(\mathrm{COS}^3(\theta)-1)d(\theta)\right)$$

$$I_1=\left(\int_0^{\pi}\mathrm{COS}^3(\theta)d(\theta)\right)=\frac{2(2)}{3}=\frac{4}{3}$$

$$I=-\frac{8}{3}\left[\frac{4}{3}-\pi\right]=\frac{8\pi}{3}-\frac{32}{3}$$

الوظيفة:

احسب المساحة المحصورة بين المنحنيات التالية:

(1

$$D\equiv\begin{cases} xy=6\\ xy=3\\ \frac{x}{y}=\frac{1}{2}\\ \frac{x}{y}=2\end{cases}$$

الجواب النهائي:$3\ln(2)$

$$2)\qquad I=\iint_D y^2x^2d(x)d(y)$$

$$D\equiv 1\le x^2+y^2\le 4$$

$$3)\qquad I=\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,d(x)d(y)$$

$$D\equiv\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2+y^2=e\end{cases}$$

$$4)\ I=\iint_D d(x)d(y)$$

$$D\equiv\begin{cases}x+y=1\\x+y=2\\x=0\\y=0\end{cases}$$

احسب مساحةالتكامل التالي

$$5)I=\iint e^{\frac{x+y}{x-y}}d(x)d(y)$$

المحصورة بين المنحنيات التالية:

$$y=4x^2$$

$$x+y=2$$

$$x=0$$

$$y=0$$